Pembahasan OSN Tingkat Provinsi Tahun 2011

Jenjang SMA

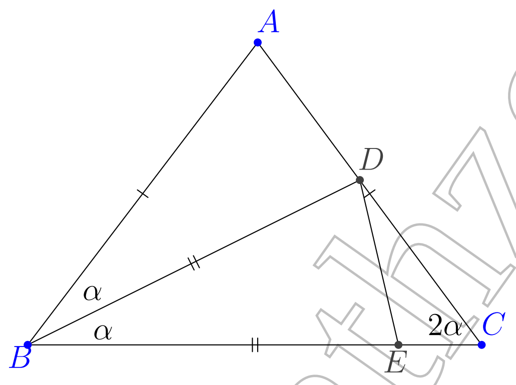
Bidang Matematika

Bagian A : Soal Isian Singkat

1. Diberikan segitiga sama kaki ABC dengan $AB = AC$. Misalkan garis bagi sudut ABC memotong AC di titik D sehingga $BC = BD + AD$. Besar sudut CAB adalah ...

   Jawaban : $100°$

   Perhatikan gambar di bawah ini!



Karena AD garis bagi $\angle ABC$ diperoleh

$$\frac{AB}{BC} = \frac{AD}{CD} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{BC}{CD} = \frac{AB}{AD}$$

Selain itu karena $BC = BD + AD$ dan $BD = BE$ maka $AD = CE$. Ingat juga bahwa $AB = AC$ sehingga diperoleh $AB \cdot CE = AC \cdot AD$ yang equivalen dengan

$$\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{CE}$$

sehingga

$$\frac{BC}{CD} = \frac{AC}{CE}$$

dengan kata lain $\triangle CED$ sebangun dengan $\triangle ABC$. Jadi, $\triangle CED$ sama kaki dengan $CE = DE$. Karena $\angle CDE = \angle DCE = 2\alpha$ maka $\angle CED = 180° - 4\alpha$. Perhatikan pula pada $\triangle BDE$, besar $\angle BED = \dfrac{180° - \alpha}{2}$. Karena $\angle BED + \angle CED = 180°$

maka diperoleh

$$\begin{aligned}\frac{180^\circ - \alpha}{2} + 180^\circ - 4\alpha &= 180^\circ \\ \frac{180^\circ - \alpha}{2} &= 4\alpha \\ 8\alpha &= 180 - \alpha \\ \alpha &= 20^\circ\end{aligned}$$

Jadi, $\angle CAB = \angle CED = 180^\circ - 4\alpha = 100^\circ$

2. Jika n bilangan asli dan $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{n}$ merupakan bilangan bulat, maka pembagi positif dari n sebanyak ...

   Jawaban : 8

   Misalkan $N = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{n}$ maka diperoleh

   $$N = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{n} = \frac{31}{30} - \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{30} - \frac{1}{n}$$

   karena $0 < \frac{1}{n} \leq 1$ maka $-\frac{29}{30} \leq \frac{1}{30} - \frac{1}{n} < \frac{1}{30}$ sehingga agar N bulat haruslah $\frac{1}{30} - \frac{1}{n} = 0$. Dengan kata lain, $n = 30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$. Sehingga banyak pembagi positif dari n adalah $(1 + 1)(1 + 1)(1 + 1) = 8$.

3. Jika $a \geq b > 1$, maka nilai terbesar yang mungkin untuk ${}^a\log\left(\frac{a}{b}\right) + {}^b\log\left(\frac{b}{a}\right)$ adalah ...

   Jawaban : 0

   Dengan memanfaatkan sifat - sifat fungsi logaritma diperoleh,

   $$\begin{aligned}{}^a\log\left(\frac{a}{b}\right) + {}^b\log\left(\frac{b}{a}\right) &= {}^a\log a - {}^a\log b + {}^b\log b - {}^b\log a \\ &= 2 - \left({}^a\log b + {}^b\log a\right) \\ &= 2 - \left({}^a\log b + \frac{1}{{}^a\log b}\right)\end{aligned}$$

   karena $\forall x \in \mathbb{R}^+$ berlaku $x + \frac{1}{x} \geq 2$ maka berakibat

   $${}^a\log\left(\frac{a}{b}\right) + {}^b\log\left(\frac{b}{a}\right) = 2 - \left({}^a\log b + \frac{1}{{}^a\log b}\right) \leq 2 - 2 = 0$$

   Jadi, nilai maksimum dari ${}^a\log\left(\frac{a}{b}\right) + {}^b\log\left(\frac{b}{a}\right)$ adalah 0 yaitu diperoleh saat $a = b$.

4. Diketahui segi empat $ABCD$. Semua titik A, B, C dan D akan diberi nomor 1, 2, 3, 4, 5 atau 6 sehingga setiap dua titik yang terletak dalam satu sisi empat nomornya

berbeda. Banyaknya cara pemberian nomor dengan cara tersebut ada sebanyak ...
Jawaban : -
Saya masih belum paham dengan kalimat "setiap dua titik yang terletak dalam satu sisi empat nomornya berbeda". Maksudnya empat nomor itu apa?

5. Diberikan fungsi f dengan $f(x) = \sqrt{ax^2 + x}$. Semua nilai a yang mungkin sehingga domain dan daerah hasil f sama adalah ...
Jawaban : $a = 0$
Misalkan domain dari f adalah D_f dan daerah hasil dari f adalah R_f. Kita tahu bahwa $R_f = \{x \in \mathbb{R} | x \geq 0\}$. Perhatikan bahwa $D_f = \{x \in \mathbb{R} | ax^2 + x \geq 0\}$. Selanjutnya cek untuk beberapa kasus :

   - Jika $a > 0$ diperoleh
$$\begin{aligned} ax^2 + x \geq 0 \quad &\Leftrightarrow \quad x(ax+1) \geq 0 \\ &\Leftrightarrow \quad x \leq -\frac{1}{a} \quad \text{atau} \quad x \geq 0 \end{aligned}$$
Untuk kasus ini, $D_f \neq R_f$ sebab terdapat $t < 0$ dan $t \in D_f$ tetapi t bukan anggota R_f.
   - Jika $a < 0$ diperoleh
$$\begin{aligned} ax^2 + x \geq 0 \quad &\Leftrightarrow \quad x(ax+1) \geq 0 \\ &\Leftrightarrow \quad 0 \leq x \leq -\frac{1}{a} \end{aligned}$$
Nilai maksimum dari $ax^2 + x$ adalah saat $x = -\frac{1}{2a}$ sehingga nilai maksimum dari f adalah $f(-\frac{1}{2a}) = -\frac{1}{2a}$. Tetapi karena $-\frac{1}{2a} < -\frac{1}{a}$ berakibat $D_f \neq R_f$.

Jadi kasus yang mungkin tinggal $a = 0$ yang berarti diperoleh $f(x) = \sqrt{x}$. Untuk kasus ini mudah dilihat bahwa $D_f = R_f$

6. Banyaknya kemungkinan bilangan asli berbeda a, b, c dan d yang kurang dari 10 dan memenuhi persamaan $a + b = c + d$ ada sebanyak ...
Jawaban : 272
Dalam soal ini saya menganggap susunan $1+4 = 2+3, 1+4 = 3+2, 4+1 = 2+3, 4+1 = 3+2, 2+3 = 1+4, 2+3 = 4+1, 3+2 = 1+4, 3+2 = 4+1$ sebagai 8 susunan yang berbeda.
Misalkan $a + b = k$ dengan $a < b$ maka diperoleh $3 \leq k \leq 17$. Kita cek semua kemungkinan untuk nilai k (Nguli Mode ON).

   - $k = 3$, diperoleh solusi (a, b) yaitu $(1, 2)$.

Banyaknya penyelesaian dari $a+b=c+d$ yaitu 0 (sebab keempat bilangan harus berbeda)

- $k=4$, diperoleh solusi (a,b) yaitu $(1,3)$.
  Banyaknya penyelesaian dari $a+b=c+d$ yaitu 0 (sebab keempat bilangan harus berbeda)
- $k=5$, diperoleh solusi (a,b) yaitu $(1,4),(2,3)$.
  Banyaknya penyelesaian dari $a+b=c+d$ yaitu $\binom{2}{2}\cdot 8=8$
- $k=6$, diperoleh solusi (a,b) yaitu $(2,4),(1,5)$.
  Banyaknya penyelesaian dari $a+b=c+d$ yaitu $\binom{2}{2}\cdot 8=8$
- $k=7$, diperoleh solusi (a,b) yaitu $(1,6),(2,5),(3,4)$.
  Banyaknya penyelesaian dari $a+b=c+d$ yaitu $\binom{3}{2}\cdot 8=24$
- $k=8$, diperoleh solusi (a,b) yaitu $(1,7),(2,6),(3,5)$.
  Banyaknya penyelesaian dari $a+b=c+d$ yaitu $\binom{3}{2}\cdot 8=24$
- $k=9$, diperoleh solusi (a,b) yaitu $(1,8),(2,7),(3,6),(4,5)$.
  Banyaknya penyelesaian dari $a+b=c+d$ yaitu $\binom{4}{2}\cdot 8=48$
- $k=10$, diperoleh solusi (a,b) yaitu $(1,9),(2,8),(3,7),(4,6)$.
  Banyaknya penyelesaian dari $a+b=c+d$ yaitu $\binom{4}{2}\cdot 8=48$
- $k=11$, diperoleh solusi (a,b) yaitu $(2,9),(3,8),(4,7),(5,6)$.
  Banyaknya penyelesaian dari $a+b=c+d$ yaitu $\binom{4}{2}\cdot 8=48$
- $k=12$, diperoleh solusi (a,b) yaitu $(3,9),(4,8),(5,7)$.
  Banyaknya penyelesaian dari $a+b=c+d$ yaitu $\binom{3}{2}\cdot 8=24$
- $k=13$, diperoleh solusi (a,b) yaitu $(4,9),(5,8),(6,7)$.
  Banyaknya penyelesaian dari $a+b=c+d$ yaitu $\binom{3}{2}\cdot 8=24$
- $k=14$, diperoleh solusi (a,b) yaitu $(5,9),(6,8)$.
  Banyaknya penyelesaian dari $a+b=c+d$ yaitu $\binom{2}{2}\cdot 8=8$
- $k=15$, diperoleh solusi (a,b) yaitu $(6,9),(7,8)$.
  Banyaknya penyelesaian dari $a+b=c+d$ yaitu $\binom{2}{2}\cdot 8=8$

- $k = 16$, diperoleh solusi (a, b) yaitu $(7, 9)$.
  Banyaknya penyelesaian dari $a + b = c + d$ yaitu 0 (sebab keempat bilangan harus berbeda)
- $k = 17$, diperoleh solusi (a, b) yaitu $(8, 9)$.
  Banyaknya penyelesaian dari $a + b = c + d$ yaitu 0 (sebab keempat bilangan harus berbeda)

Jadi, total ada $8 + 8 + 24 + 24 + 48 + 48 + 48 + 24 + 24 + 8 + 8 = 272$ penyelesaian.

7. Jika kedua akar persamaan $x^2 - 2013x + k = 0$ adalah bilangan prima, maka nilai k yang mungkin adalah ...
   Jawaban : 4022
   Misalkan kedua akar persamaan tersebut adalah a dan b dan $a < b$. Kita peroleh
   $$a + b = 2013 \quad \text{dan} \quad ab = k$$
   karena $a + b$ ganjil maka salah satu dari a atau b adalah ganjil dan satunya genap. Tetapi karena a, b prima berakibat $a = 2$ sehingga $b = 2011$. Oleh karena itu, $k = ab = 2 \cdot 2011 = 4022$.

8. Jika
   $$\left(1 - \tan^2 \frac{x}{2^{2011}}\right)\left(1 - \tan^2 \frac{x}{2^{2010}}\right) \cdots \left(1 - \tan^2 \frac{x}{2}\right) = 2^{2011}\sqrt{3} \tan \frac{x}{2^{2011}}$$
   maka $\sin 2x$ adalah ...
   Jawaban : $\frac{1}{2}\sqrt{3}$
   Dari identitas
   $$\tan 2x = \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x}$$
   diperoleh
   $$1 - \tan^2 x = \frac{2 \tan x}{\tan 2x}$$
   sehingga
   $$\begin{aligned} \left(1 - \tan^2 \frac{x}{2^{2011}}\right)\left(1 - \tan^2 \frac{x}{2^{2010}}\right) \cdots \left(1 - \tan^2 \frac{x}{2}\right) &= 2^{2011}\sqrt{3} \tan \frac{x}{2^{2011}} \\ \frac{2 \cdot \tan \frac{x}{2^{2011}}}{\tan \frac{x}{2^{2010}}} \cdot \frac{2 \cdot \tan \frac{x}{2^{2010}}}{\tan \frac{x}{2^{2009}}} \cdots \cdot \frac{2 \cdot \tan \frac{x}{2}}{\tan x} &= 2^{2011}\sqrt{3} \tan \frac{x}{2^{2011}} \\ \frac{2^{2011} \cdot \tan \frac{x}{2^{2011}}}{\tan x} &= 2^{2011}\sqrt{3} \tan \frac{x}{2^{2011}} \\ \tan x &= \frac{1}{3}\sqrt{3} \end{aligned}$$

oleh karena itu, $\sin x = \frac{1}{2}$ dan $\cos x = \frac{1}{2}\sqrt{3}$. Sehingga $\sin 2x = 2\sin x \cos x = \frac{1}{2}\sqrt{3}$.

9. Pada ruang Cartesius kita ingin bergerak dari titik $(2, 0, 11)$ ke titik $(20, 1, 1)$ selalu pada koordinat (x, y, z) dengan paling sedikit dua dari x, y dan z adalah bilangan bulat, dan lintasan terpendek. Cara bergerak yang dimaksud sebanyak ...

   Jawaban : -

   Saya masih agak bingung dengan kalimat "paling sedikit dua dari x, y dan z adalah bilangan bulat" apakah itu berarti lintasan seperti $(2, 0, \frac{1}{2}) --> (3, 0, \frac{1}{2}) --> (4, 0, \frac{1}{2})$ dan seterusnya diperbolehkan. Jika iya, makanya cara bergerak yang demikian jumlahnya ada tak hingga.

   Sedangkan jika yang dimaksud soal, kita hanya boleh berbelok pada titik - titik dimana (x, y, z) ketiganya bulat maka cara yang demikian ada sebanyak

$$\frac{29!}{1! \cdot 18! \cdot 10!}$$

10. Misalkan x, y dan z adalah bilangan real positif dengan sifat $xyz = 1$. Nilai terkecil dari

$$(x + 2y)(y + 2z)(xz + 1)$$

   tercapai saat $x + y + z$ bernilai ...

   Jawaban : $3\frac{1}{2}$

   Dengan AM - GM diperoleh

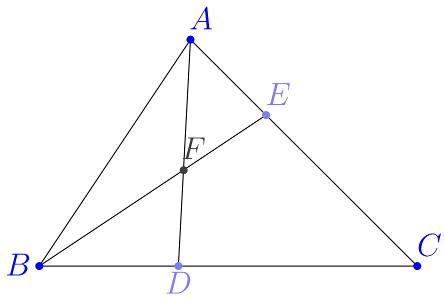
$$\begin{aligned} x + 2y &\geq 2\sqrt{2xy} \\ y + 2z &\geq 2\sqrt{2yz} \\ xz + 1 &\geq 2\sqrt{xz} \end{aligned}$$

   sehingga

$$(x + 2y)(y + 2z)(xz + 1) \geq 16\sqrt{x^2y^2z^2} = 16xyz = 16$$

   oleh karena itu nilai terkecil dari $(x + 2y)(y + 2z)(xz + 1)$ adalah 16 yaitu saat $x = 2, y = 1$ dan $z = \frac{1}{2}$ sehingga diperoleh $x + y + z = 3\frac{1}{2}$

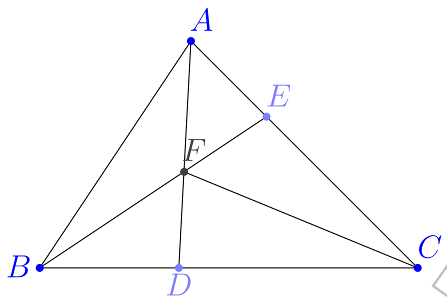
11. Pada gambar di bawah ini, panjang $AE = x, EC = y$ dan $DC = 2BD$. Perbandingan panjang BF dan FE dinyatakan dalam x dan y adalah ...



Jawaban : $\dfrac{x+y}{2x}$

Definisikan $[ABC]$ sebagai luas segitiga ABC. Perlu diingat bahwa dua segitiga yang memiliki tinggi sama maka perbandingan luas kedua segitiga tersebut sama dengan perbandingan alasnya.

Selanjutnya perhatikan gambar berikut !



Dengan demikian karena $DC = 2BD$ diperoleh $[ACD] = 2[ABD]$ dan $[CDF] = 2[BDF]$. Perhatikan juga bahwa

$$[ACF] = [ACD] - [CDF] = 2[ABD] - 2[BDF] = 2[ABF]$$

Selain itu, karena $AE = x$ dan $CE = y$ berakibat $\dfrac{[AEF]}{[CEF]} = \dfrac{x}{y}$ yang equivalen dengan

$$\begin{aligned}[AEF] &= \frac{x}{x+y}[ACF] \\ &= \frac{2x}{x+y}[ABF]\end{aligned}$$

sehingga

$$\frac{[AEF]}{[ABF]} = \frac{2x}{x+y}$$

Oleh karena itu,

$$\frac{BF}{FE} = \frac{[ABF]}{[AEF]} = \frac{x+y}{2x}$$

12. Banyak bilangan tiga digit yang semua digit - digitnya berbeda dan digit terakhir merupakan hasil penjumlahan dari dua digit yang lainnya adalah ...

Jawaban : 32

Kita bagi kasus,

- Jika digit terakhir 3
  Karena $3 = 1 + 2$ maka banyaknya bilangan ada 2.
- Jika digit terakhir 4
  Karena $4 = 1 + 3$ maka banyaknya bilangan ada 2.
- Jika digit terakhir 5
  Karena $5 = 1 + 4 = 2 + 3$ maka banyaknya bilangan ada 4.
- Jika digit terakhir 6
  Karena $6 = 1 + 5 = 2 + 4$ maka banyaknya bilangan ada 4.
- Jika digit terakhir 7
  Karena $7 = 1 + 6 = 2 + 5 = 3 + 4$ maka banyaknya bilangan ada 6.
- Jika digit terakhir 8
  Karena $8 = 1 + 7 = 2 + 6 = 3 + 5$ maka banyaknya bilangan ada 6.
- Jika digit terakhir 9
  Karena $9 = 1 + 8 = 2 + 7 = 3 + 6 = 4 + 5$ maka banyaknya bilangan ada 8.

Jadi, total ada $2 + 2 + 4 + 4 + 6 + 6 + 8 = 32$ bilangan.

13. Diberikan barisan bilangan rasional $\{a_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ yang didefinisikan dengan $a_1 = 2$ dan

$$a_{n+1} = \frac{a_n - 1}{a_n + 1}, n \in \mathbb{N}$$

Nilai a_{2011} adalah ...

Jawaban : $-\frac{1}{2}$

Cek untuk beberapa nilai n yang pertama, kita peroleh barisan

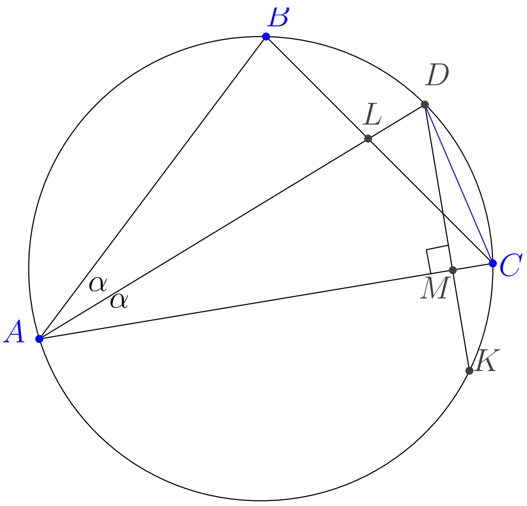
$$2, \frac{1}{3}, -\frac{1}{2}, -3, 2, \frac{1}{3}, -\frac{1}{2}, -3, \cdots$$

Jadi, barisan di atas berulang setiap 4 suku. Karena $2011 = 4 \cdot 502 + 3$ maka $a_{2011} = a_3 = -\frac{1}{2}$

14. Misalkan Γ lingkaran luar segitiga ABC. Talibusur AD adalah garis bagi $\angle BAC$ yang memotong BC di titik L. Talibusur DK tegak lurus pada AC dan memotongnya di titik M. Jika $\frac{BL}{BC} = \frac{1}{2}$, maka perbandingan $\frac{AM}{MC} = \ldots$

Jawaban : 3

Perhatikan gambar berikut!



Karena AD adalah garis bagi $\angle BAC$ maka $\frac{AB}{AC} = \frac{BL}{LC} = \frac{1}{2}$. Misalkan panjang $AB = x$ maka $AC = 2x$. Perhatikan bahwa $\triangle CDL \sim \triangle ACD$ maka diperoleh

$$\frac{DC}{AD} = \frac{DL}{DC} \Leftrightarrow DC^2 = AD \cdot DL$$

Selain itu, $\triangle ABL \sim \triangle ACD$ sehingga diperoleh

$$\frac{AB}{AD} = \frac{AL}{AC} \Leftrightarrow AD \cdot AL = AB \cdot AC = 2x^2$$

Karena $\triangle AMD$ dan $\triangle CMD$ keduanya adalah segitiga siku - siku, dengan dalil phytagoras kita peroleh

$$\begin{aligned}
AD^2 - AM^2 = DC^2 - MC^2 &\Leftrightarrow AD^2 - DC^2 = AM^2 - MC^2 \\
&\Leftrightarrow AD^2 - AD \cdot AL = (AM + MC)(AM - MC) \\
&\Leftrightarrow AD(AD - AL) = 2x(AM - MC) \\
&\Leftrightarrow AD \cdot DL = 2x(AM - MC) \\
&\Leftrightarrow 2x^2 = 2x(AM - MC) \\
&\Leftrightarrow AM - MC = x
\end{aligned}$$

Karena $AM - MC = x$ dan $AM + MC = 2x$ maka didapat $2AM = 3x$ dan $2MC = x$ sehingga

$$\frac{AM}{MC} = \frac{2AM}{2MC} = \frac{3x}{x} = 3$$

15. Dua dadu memiliki angka 1 sampai 6 yang dapat dilepas dari dadu. Kedua belas angka tersebut dilepas dari dadu dan dimasukkan ke dalam suatu kantong. Secara acak diambil satu angka dan dipasangkan ke salah satu dari kedua dadu tersebut. Setelah semua angka terpasangkan, kedua dadu dilemparkan secara bersamaan. Peluang munculnya angka tujuh sebagai jumlah dari angka pada bagian atas kedua

dadu tersebut adalah ...

Jawaban : $\frac{54}{297}$

Misalkan angka - angka pada dadu I adalah $1, 2, 3, 4, 5, 6$ dan angka - angka pada dadu II adalah $\overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{4}, \overline{5}, \overline{6}$. Pada proses ini bisa kita anggap kita memasangkan angka pada dadu I terlebih dahulu setelah itu dadu II dipasangkan dengan 6 angka sisanya. Oleh karena itu banyaknya pasangan dadu yang bisa dibentuk adalah $C_6^{12} = 924$. Sedangkan jumlah 7 bisa diperoleh jika angka yang ada di bagian atas adalah $(1, \overline{6}), (2, \overline{5}), (3, \overline{4}), (4, \overline{3}), (5, \overline{2}), (6, \overline{1})$. Kita selidiki untuk kasus $(1, \overline{6})$ atau $(6, \overline{1})$. Sedangkan untuk dua kasus lainnya identik dengan kasus ini.

Perhatikan kemungkinan distribusi angka - angka $1, 6, \overline{1}, \overline{6}$ yang bisa menghasilkan jumlah 7 adalah sebagai berikut :

(a) Dadu I memiliki salah satu dari angka - angka $1, 6, \overline{1}, \overline{6}$
Banyaknya kemungkinan pasangan dadu yang bisa dibentuk adalah $C_1^4 \cdot C_5^8 = 224$. Sedangkan untuk masing - masing kemungkinan peluang muncul jumlah 7 adalah $\frac{2}{36}$. Jadi, untuk kasus ini total peluang muncul jumlah 7 yaitu $\frac{224}{924} \cdot \frac{2}{36} = \frac{4}{297}$.

(b) Dadu I memiliki dua angka dari angka - angka $1, 6, \overline{1}, \overline{6}$

- Jika dua angka tersebut adalah $(1, 6), (1, \overline{6}), (\overline{1}, 6)$ atau $(\overline{1}, \overline{6})$ maka banyaknya kemungkinan pasangan dadu yang bisa dibentuk adalah $4 \cdot C_4^8 = 280$. Sedangkan untuk masing - masing kemungkinan peluang muncul jumlah 7 adalah $\frac{2}{36}$. Jadi, untuk kasus ini total peluang muncul jumlah 7 yaitu $\frac{280}{924} \cdot \frac{2}{36} = \frac{5}{297}$.
- Jika dua angka tersebut adalah $(1, \overline{1})$ atau $(6, \overline{6})$ maka banyaknya kemungkinan pasangan dadu yang bisa dibentuk adalah $2 \cdot C_4^8 = 140$. Sedangkan untuk masing - masing kemungkinan peluang muncul jumlah 7 adalah $\frac{4}{36}$. Jadi, untuk kasus ini total peluang muncul jumlah 7 yaitu $\frac{140}{924} \cdot \frac{4}{36} = \frac{5}{297}$.

(c) Dadu I memiliki tiga angka dari angka - angka $1, 6, \overline{1}, \overline{6}$
Banyaknya kemungkinan pasangan dadu yang bisa dibentuk adalah $C_3^4 \cdot C_3^8 = 224$. Sedangkan untuk masing - masing kemungkinan peluang muncul jumlah 7 adalah $\frac{2}{36}$. Jadi, untuk kasus ini total peluang muncul jumlah 7 yaitu $\frac{224}{924} \cdot \frac{2}{36} = \frac{4}{297}$.

Oleh karena itu peluang muncul jumlah 7 yang diperoleh dari pasangan $(1, \overline{6})$ atau $(6, \overline{1})$ adalah $\frac{4}{297} + \frac{5}{297} + \frac{5}{297} + \frac{4}{297} = \frac{18}{297}$. Jadi, total peluang muncul angka 7 adalah $3 \cdot \frac{18}{297} = \frac{54}{297}$

16. Banyaknya bilangan asli n sehingga setiap titik dengan koordinat bilangan asli yang terletak pada garis $x + y = n$ mempunyai jarak suatu bilangan prima terhadap titik

pusat $(0, 0)$ adalah ...

Jawaban : 0

Jika $n = 1$ maka diperoleh persamaan garis $x + y = 1$ yang jelas tidak memiliki koordinat berupa bilangan asli. Oleh karena itu haruslah $n \geq 2$. Perhatikan bahwa titik $(1, n-1)$ merupakan koordinat bilangan asli yang terletak pada garis $x+y = n$ sehingga diperoleh

$$1^2 + (n-1)^2 = p^2$$

dengan p adalah bilangan prima.

Lebih jauh diperoleh $1 = p^2 - (n-1)^2$. Padahal kita ketahui bahwa dua bilangan kuadrat yang berselisih 1 hanya 0^2 dan 1^2 yang keduanya, baik 0 ataupun 1 bukan bilangan prima. Jadi, tidak ada bilangan asli n yang memenuhi kondisi pada soal.

17. Bilangan asli n yang memenuhi $(-2004)^n - 1900^n + 25^n - 121^n$ habis dibagi 2000 adalah ...

Jawaban : semua bilangan asli

Ingat kembali bahwa untuk setiap bilangan asli n berlaku

$$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \cdots + a^2b^{n-3} + ab^{n-2} + b^{n-1})$$

dan jika a, b adalah bilangan bulat, dapat kita katakan $a^n - b^n$ habis dibagi $(a-b)$. Selanjutnya perhatikan, $-2004 - 1900 = -3904$ sehingga $(-2004)^n - 1900^n$ habis dibagi -3904 tetapi karena $-3904 = -244 \cdot 16$ berakibat $(-2004)^n - 1900^n$ habis dibagi 16. Demikian dengan cara yang sama diperoleh $25^n - 121^n$ habis dibagi 16 karena $25 - 121 = -96 = -6 \cdot 16$. Oleh karena itu, $(-2004)^n - 1900^n + 25^n - 121^n$ habis dibagi 16. Selain itu, $(-2004)^n - 121^n$ habis dibagi 125 karena $-2004 - 121 = -2125 = -17 \cdot 125$ serta $25^n - 1900^n$ juga habis dibagi 125 sebab $25 - 1900 = -1875 = -15 \cdot 125$. Jadi, sekali lagi diperoleh $(-2004)^n - 1900^n + 25^n - 121^n$ habis dibagi 125. Akan tetapi, karena 16 dan 125 keduanya saling prima berakibat $(-2004)^n - 1900^n + 25^n - 121^n$ habis dibagi $16 \cdot 125 = 2000$ untuk setiap bilangan asli n.

18. Sepuluh orang siswa duduk dalam suatu baris. Semua siswa bangkit dan duduk kembali pada baris tersebut dengan aturan setiap siswa dapat duduk kembali pada kursi yang sama atau pada kursi yang berada di sebelah kursi lamanya. Banyaknya cara semua siswa tersebut duduk kembali pada baris tadi ada sebanyak ...

Jawaban : 89

Misalkan susunan duduk semula adalah $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10$. Selanjutnya kita bagi menjadi dua kelompok yaitu kelompok I $= 1, 2, 3, 4, 5$ dan kelompok II $= 6, 7, 8, 9, 10$. Banyaknya cara kelompok I duduk kembali pada kursinya ada 8 cara yaitu $12345, 21345,$

$12435, 21435, 12354, 21354, 13245, 13254$. Demikian pula banyaknya cara kelompok II duduk kembali pada kursi ada 8 cara (kedua kelompok pada dasarnya sama hanya beda nomor saja tetapi karakteristiknya sama). Jadi, jika kelompok I dan kelompok II saling lepas maka banyaknya cara kedua kelompok tersebut duduk kembali pada kursinya ada 8 x 8 = 64 cara.
Perhatikan jika kelompok I dan kelompok II tidak saling lepas. Dalam hal ini satu - satunya terjadi overlaping jika dan hanya jika siswa yang duduk pada posisi 5 dan 6 saling bergantian. Oleh karena itu diperoleh kelompok I yang baru yaitu $1, 2, 3, 4, 6$ dan kelompok II yang baru yaitu $5, 7, 8, 9, 10$. Selanjutnya mudah dilihat bahwa banyaknya cara kelompok I yang baru duduk kembali pada kursinya ada 5 cara yaitu $12346, 21346, 12436,$
$21436, 13246$. Demikian pula banyaknya cara kelompok II yang baru duduk kembali pada kursinya juga ada 5 cara. Sehingga jika kelompok I dan kelompok II tidak saling lepas maka banyaknya cara kedua kelompok tersebut duduk kembali pada kursinya ada 5 x 5 = 25 cara.
Jadi, total banyaknya cara semua siswa tersebut duduk kembali pada baris tadi ada sebanyak $64 + 25 = 89$ cara.

19. Bilangan asli terbesar $n \leq 123456$ sehingga terdapat bilangan asli x dengan sifat jumlah semua digit dari x^2 sama dengan n adalah ...
Jawaban :
Perhatikan bahwa $S(N) \equiv N \mod 9$, dimana $S(N)$ adalah jumlah semua digit dari N. Tetapi ingat pula bahwa untuk sebarang N kita peroleh $N^2 \equiv 0, 1, 4, 7 \mod 9$. Berdasarkan dua fakta ini, kita peroleh

$$\begin{aligned} n &\equiv x^2 \mod 9 \\ &\equiv 0, 1, 4, 7 \mod 9 \end{aligned}$$

Karena $123456 \equiv 3 \mod 9$, $123455 \equiv 2 \mod 9$ dan $123454 \equiv 1 \mod 9$ maka $n \leq 123454$.
Tetapi kita juga punya,

$$\begin{aligned} \Big(\underbrace{9999999\cdots9}_{9 \text{ sebanyak } 13716}8\Big)^2 &= \left(10^{13717} - 2\right)^2 \\ &= 10^{27434} - 4 \cdot 10^{13717} + 4 \\ &= \underbrace{9999999\cdots9}_{9 \text{ sebanyak } 13716}6\underbrace{0000000\cdots0}_{0 \text{ sebanyak } 13716}4 \end{aligned}$$

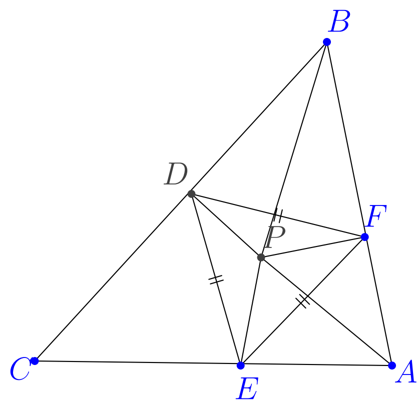
dan jumlah digit dari $\underbrace{9999999\cdots9}_{9 \text{ sebanyak } 13716}6\underbrace{0000000\cdots0}_{0 \text{ sebanyak } 13717}4$ adalah $9 \cdot 13716 + 6 + 4 = 123454$.
Jadi, nilai n terbesar adalah $n = 123454$ dengan nilai x yang bersesuaian adalah

$x = \underbrace{9999999\cdots9}_{\text{9 sebanyak 13716}}8$

20. Misalkan ABC suatu seitiga dan P titik di dalam segitiga. Misalkan D, E, F berturut - turut titik di sisi - sisi BC, CA, AB sedemikian sehingga PD tegak lurus BC, PE tegak lurus CA, dan PF tegak lurus AB. Jika segitiga DEF sama sisi dan $\angle APB = 70°$, maka $\angle ACB = ...$

    Jawaban : 10°

    Perhatikan gambar berikut !



Pada $\triangle ABP$ berlaku

$$\begin{aligned}\angle FAP + \angle FBP &= 180° - \angle APB\\ &= 180° - 70°\\ &= 110°\end{aligned}$$

Perhatikan pula, $\angle AEP = \angle AFP = \angle BFP = \angle BDP = 90°$. Dengan demikian segiempat $AEPF$ dan segiempat $BDPF$ keduanya adalah segiempat talibusur. Sehingga diperoleh

$$\angle DBP = \angle DFP \quad \text{dan} \quad \angle EAP = \angle EFP$$

Ingat pula, $\angle DFP + \angle EFP = 60°$. Oleh karena itu, diperoleh

$$\begin{aligned}\angle ACB &= 180° - (\angle CAB + \angle CBA)\\ &= 180° - (\angle EAP + \angle FAP + \angle DBP + \angle FBP)\\ &= 180° - (\angle EFP + \angle DFP + 110°)\\ &= 180° - (60° + 110°)\\ &= 10°\end{aligned}$$

Bagian B : Soal Uraian

1. Tentukan semua nilai k yang mungkin sehingga tidak ada pasangan bilangan real (x, y) yang memenuhi sistem persamaan

$$x^2 - y^2 = 0$$
$$(x-k)^2 + y^2 = 1$$

Jawaban :
Dari persamaan pertama diperoleh $y = \pm x$. Hal ini berarti pasangan (x, y) keduanya real atau keduanya imajiner. Substitusikan $y^2 = x^2$ ke persamaan kedua sehingga diperoleh

$$(x-k)^2 + x^2 = 1 \Leftrightarrow 2x^2 - 2kx + k^2 - 1 = 0$$

Agar persamaan terakhir tidak memiliki penyelesaian real maka haruslah nilai diskriminannya yaitu $D = 4k^2 - 4 \cdot 2 \cdot (k^2 - 1)$ kurang dari 0. Sehingga didapat,

$$4k^2 - 4 \cdot 2 \cdot (k^2 - 1) < 0 \Leftrightarrow 8 - 4k^2 < 0 \Leftrightarrow 2 - k^2 < 0$$

sehingga $k < -\sqrt{2}$ atau $k > \sqrt{2}$.
Jadi, nilai k yang memenuhi agar sistem persamaan pada soal tidak memiliki penyelesaian real adalah $\{k \in \mathbb{R} | k < -\sqrt{2} \text{ atau } k > \sqrt{2}\}$.

2. Suatu bilangan dikatakan *cantik* jika memenuhi sekaligus dua kondisi berikut :

   (a) Merupakan kuadrat sempurna, yaitu kuadrat dari suatu bilangan asli.

   (b) Jika digit paling kanan pada penulisan desimalnya dipindah posisinya menjadi digit paling kiri, maka bilangan yang terbentuk masih merupakan kuadrat sempurna.

Sebagai contoh, 441 merupakan bilangan *cantik* terdiri dari 3 digit, karena $441 = 21^2$ dan $144 = 12^2$. Sedangkan 144 bukan bilangan *cantik* karena $144 = 12^2$ tetapi 414 bukan bilangan kuadrat sempurna.
Buktikan bahwa terdapat bilangan *cantik* yang penulisan desimalnya terdiri dari tepat 2011 digit!

Jawaban :
Kita definisikan $T_n = \left(\underbrace{2222\cdots 2}_{n \text{ angka } 2}1\right)^2$ dan $S_n = \left(1\underbrace{2222\cdots 2}_{n \text{ angka } 2}\right)^2$.
Karena $2 \cdot 10^n < \underbrace{2222\cdots 2}_{n \text{ angka } 2}1 < 3 \cdot 10^n$ maka $4 \cdot 10^{2n} < T_n < 9 \cdot 10^{2n}$. Dari sini

diperoleh bahwa T_n terdiri dari $2n+1$ digit. Selanjutnya perhatikan bahwa,

$$\begin{aligned}
S_n &= \Big(1\underbrace{2222\cdots 2}_{n \text{ angka } 2}\Big)^2 \\
&= \left(10^n + 2\left(\frac{10^n-1}{9}\right)\right)^2 \\
&= 10^{2n} + 4\cdot 10^n\left(\frac{10^n-1}{9}\right) + 4\left(\frac{10^n-1}{9}\right)^2
\end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned}
T_n &= \Big(\underbrace{2222\cdots 2}_{n \text{ angka } 2}1\Big)^2 \\
&= \left(20\left(\frac{10^n-1}{9}\right)+1\right)^2 \\
&= 400\left(\frac{10^n-1}{9}\right)^2 + 40\left(\frac{10^n-1}{9}\right) + 1
\end{aligned}$$

Jelas terlihat bahwa digit terakhir dari T_n adalah 1. Agar T_n merupakan bilangan *cantik* haruslah

$$10^{2n} + 40\left(\frac{10^n-1}{9}\right)^2 + 4\left(\frac{10^n-1}{9}\right)$$

merupakan bilangan kuadrat sempurna.
Untuk itu perhatikan bahwa,

$$\begin{aligned}
&10^{2n} + 40\left(\frac{10^n-1}{9}\right)^2 + 4\left(\frac{10^n-1}{9}\right) \\
&= 10^{2n} + \frac{40\cdot 10^{2n} - 80\cdot 10^n + 40}{9^2} + \frac{4\cdot 10^n - 4}{9} \\
&= 10^{2n} + \frac{4\cdot 10^{2n} - 8\cdot 10^n + 4}{9^2} + \frac{36\cdot 10^{2n} - 72\cdot 10^n + 36}{9^2} + \frac{4\cdot 10^n - 4}{9} \\
&= 10^{2n} + 4\left(\frac{10^n-1}{9}\right)^2 + \frac{4\cdot 10^{2n} - 4\cdot 10^n}{9} \\
&= 10^{2n} + 4\left(\frac{10^n-1}{9}\right)^2 + 4\cdot 10^n\left(\frac{10^n-1}{9}\right) \\
&= S_n
\end{aligned}$$

Jadi, terbukti untuk setiap bilangan asli n, T_n merupakan bilangan *cantik* yang terdiri dari $2n+1$ digit. Oleh karena itu, jika $n = 1005$ maka diperoleh T_{1005} merupakan bilangan *cantik* yang terdiri dari 2011 digit.
Jadi, terbukti terdapat bilangan *cantik* yang penulisan desimalnya terdiri dari tepat 2011 digit.

3. Misalkan A adalah himpunan semua pembagi positif dari 10^9. Jika dipilih dua

bilangan sebarang x dan y di A (boleh sama), tentukan peluang dari kejadian x membagi y

Jawaban :

Karena $10^9 = 2^9 \cdot 5^9$ maka banyaknya pembagi positif dari 10^9 adalah 100. Dengan kata lain $n(A) = 100$. Banyak cara memilih dua bilangan sebarang x dan y di A yaitu

- Jika $x = y$ maka banyaknya memilih x dan y ada 100 cara.
- Jika $x \neq y$ maka banyaknya memilih x dan y ada $C_2^{100} = 4950$ cara.

Jadi, banyak cara memilih dua bilangan sebarang x dan y di A ada $100 + 4950 = 5050$ cara.

Selanjutnya misalkan $x = 2^a \cdot 5^b$ dan $y = 2^p \cdot 5^q$ dimana $0 \leq a, b, p, q \leq 9$. Agar x membagi y haruslah $a \leq p$ dan $b \leq q$. Banyaknya cara memilih pasangan (a, p) yang demikian ada $C_2^{10} + 10 = 55$ cara. Demikian juga banyaknya cara memilih pasangan (b, q) juga ada 55 cara. Oleh karena itu banyaknya cara memilih pasangan (x, y) sehingga x membagi y ada $55 \cdot 55 = 3025$. Oleh karena itu peluangnya terambil x dan y sehingga x membagi y adalah $\frac{3025}{5050}$.

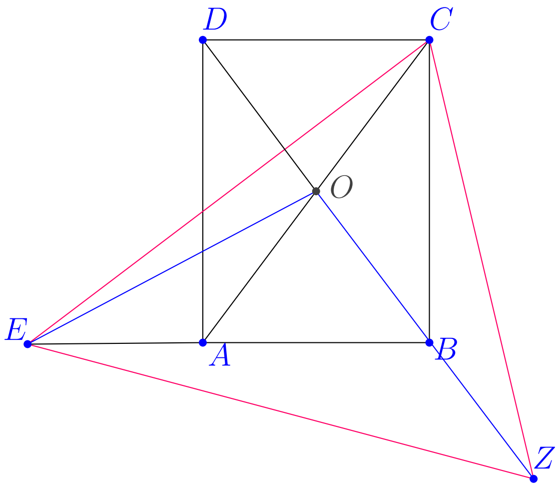
4. Diberikan persegi panjang (siku empat) $ABCD$ dengan $AB = a$ dan $BC = b$. Titik O adalah perpotongan antara kedua diagonalnya. Perpanjang sisi BA sehingga $AE = AO$, juga perpanjang diagonal BD sehingga $BZ = BO$. Asumsikan segitiga EZC sama sisi. Buktikan bahwa

   (a) $b = a\sqrt{3}$

   (b) EO tegak lurus ZD

   Jawaban :

   Perhatikan sketsa di bawah ini !



Tanpa mengurangi keumuman, misalkan koordinat $A(0,0), B(a,0), C(a,b)$ dan $D(0,b)$. Sehingga diperoleh koordinat $E(-\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2}, 0)$ dan $Z(\frac{3}{2}a, -\frac{1}{2}b)$. Oleh karena itu diperoleh vektor $\overrightarrow{CE} = (-\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2} - a, -b)$ dan $\overrightarrow{CZ} = (\frac{1}{2}a, -\frac{3}{2}b)$. Karena EZC segitiga sama sisi diperoleh,

$$\begin{aligned}
|\overrightarrow{CE}|^2 &= |\overrightarrow{CZ}|^2 \\
\left(-\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2} - a\right)^2 + b^2 &= \frac{1}{4}a^2 + \frac{9}{4}b^2 \\
\frac{1}{4}(a^2+b^2) + a\sqrt{a^2+b^2} + b^2 &= \frac{1}{4}a^2 + \frac{9}{4}b^2 \\
a\sqrt{a^2+b^2} + a^2 &= b^2 \\
a\sqrt{a^2+b^2} &= b^2 - a^2
\end{aligned}$$

selain itu dengan aturan dot product diperoleh,

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{CE} \cdot \overrightarrow{CZ} &= |\overrightarrow{CE}||\overrightarrow{CZ}| \cos 60^\circ \\
-\frac{1}{4}a\sqrt{a^2+b^2} - \frac{1}{2}a^2 + \frac{3}{2}b^2 &= \frac{1}{2}|\overrightarrow{CZ}|^2 \\
-\frac{1}{4}(b^2-a^2) - \frac{1}{2}a^2 + \frac{3}{2}b^2 &= \frac{1}{2}(\frac{1}{4}a^2 + \frac{9}{4}b^2) \\
\frac{5}{4}b^2 - \frac{1}{4}a^2 &= \frac{1}{8}a^2 - \frac{9}{8}b^2 \\
\frac{1}{8}b^2 &= \frac{3}{8}a^2 \\
b &= a\sqrt{3}
\end{aligned}$$

Selanjutnya karena $b = a\sqrt{3}$ maka koordinat $E(-a, 0)$. Jadi, $\overrightarrow{EO} = (\frac{3}{2}a, \frac{1}{2}b)$ dan

$\overrightarrow{ZO} = (-a, b)$. Oleh karena itu,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{EO} \cdot \overrightarrow{ZO} &= -\frac{3}{2}a^2 + \frac{1}{2}b^2 \\ &= -\frac{3}{2}a^2 + \frac{3}{2}a^2 \\ &= 0\end{aligned}$$

sehingga dapat disimpulkan $EO \perp ZO$ yang berarti $EO \perp ZD$.
Alternatif Jawaban :
Misalkan $\angle ABD = \alpha$ dan $\angle CBD = \beta$. Karena $\triangle CEZ$ sama sisi maka $CE = EZ = CZ$. Selanjutnya dengan aturan cosinus pada $\triangle BEZ$ diperoleh,

$$\begin{aligned}EZ^2 &= BE^2 + BZ^2 - 2 \cdot BE \cdot BZ \cos(180^\circ - \alpha) \\ CE^2 &= BE^2 + BZ^2 + 2 \cdot BE \cdot BZ \cos\alpha \\ BE^2 + BC^2 &= BE^2 + BZ^2 + 2 \cdot BE \cdot BZ \cos\alpha \\ b^2 &= \frac{1}{4}(a^2 + b^2) + 2(a + \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2}) \cdot \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2} \cdot \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \\ b^2 &= \frac{1}{4}(a^2 + b^2) + a^2 + \frac{1}{2}a\sqrt{a^2 + b^2} \\ a\sqrt{a^2 + b^2} &= \frac{3}{2}b^2 - \frac{5}{2}a^2\end{aligned}$$

Demikian pula dengan aturan cosinus pada $\triangle BCZ$ didapat,

$$\begin{aligned}CZ^2 &= BC^2 + BZ^2 - 2 \cdot BC \cdot BZ \cos(180^\circ - \beta) \\ CE^2 &= BC^2 + BZ^2 + 2 \cdot BC \cdot BZ \cos\beta \\ BE^2 + BC^2 &= BC^2 + BZ^2 + 2 \cdot BC \cdot BZ \cos\beta \\ (a + \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2})^2 &= \frac{1}{4}(a^2 + b^2) + 2b \cdot \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2} \cdot \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \\ b^2 - a^2 &= a\sqrt{a^2 + b^2} \\ b^2 - a^2 &= \frac{3}{2}b^2 - \frac{5}{2}a^2 \\ b &= a\sqrt{3}\end{aligned}$$

Oleh karena itu terbukti, $b = a\sqrt{3}$. Hal ini berakibat $AO = a$ sehingga $\triangle ABO$ adalah segitiga sama sisi. Karena itu didapat $\angle EAO = 120^\circ$ sehingga $\angle AOE = 30^\circ$. Jadi, $\angle BOE = \angle BOA + \angle AOE = 60^\circ + 30^\circ = 90^\circ$. Terbukti bahwa $EO \perp ZD$.

5. Misalkan M adalah himpunan bagian dari $\{1, 2, 3, \cdots, 12, 13\}$ dan tidak ada tiga anggota M yang hasil kalinya berbentuk kuadrat sempurna. Tentukan banyak maksimum anggota M yang mungkin.

Jawaban :

Pasangan triple yang hasil kalinya berupa kuadrat sempurna yaitu
$(1,2,8),(1,3,12),(1,4,9),(2,5,10),(2,3,6),(2,4,8),(2,6,12),(2,8,9),(3,4,12),(3,6,8)(3,9,12$
dan $(6,8,12)$.

Misalkan k menyatakan banyak anggota himpunan M. Perhatikan dari triple $(1,4,9),(2,5,10)$ dan $(6,8,12)$ diperoleh minimal satu bilangan dari masing - masing triple tersebut bukan anggota M. Dengan demikian $k \leq 10$.

Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa $k \neq 10$.

Kita gunakan bukti tak langsung, andaikan $k = 10$. Hal ini berakibat 2 bukan anggota M. Sebab andaikan $2 \in M$ maka minimal satu bilangan dari masing - masing pasangan $(3,6),(4,8),(6,12)$ dan $(8,9)$ bukan anggota M. Kontradiksi dengan $k = 10$. Jadi terbukti 2 bukan anggota M.

Selanjutnya jika $3 \in M$ dan $12 \in M$ maka minimal tiga bilangan dari himpunan $\{4,6,8,9\}$ bukan anggota M, sehingga $k < 10$. Kontradiksi. Jadi jika $k = 10$ maka minimal salah satu dari 3 atau 12 bukan angota M.

- Jika $3 \in M$ dan 12 bukan anggota M maka dari himpunan $\{6,8\}$ dan $\{4,9\}$ masing - masing minimal satu anggotanya bukan anggota M. Jadi $k < 10$, yang jelas tidak mungkin.
- Jika $12 \in M$ dan 3 bukan anggota M maka dari triple $(1,4,9)$ dan $(6,8,12)$ masing - masing minimal satu anggotanya bukan anggota M. Jadi, $k < 10$ yang tidak mungkin juga.

Oleh karena itu, dapat disimpulkan bahwa $k \neq 10$. Dengan kata lain $k \leq 9$. Untuk $k = 9$, kita dapat memilih $M = \{4,5,6,7,9,10,11,12,13\}$. Jadi, terbukti banyak anggota maksimum dari M adalah 9.

Disusun oleh : Tutur Widodo
Apabila ada saran, kritik maupun masukan
silakan kirim via email ke
tutur.w87@gmail.com
Terima kasih.
My blog : mathematic-room.blogspot.com